**Sparse Zonal Harmonic Factorization for Efficient SH Rotation**

笔记作者:练孙鸿

**0 Abstract**

本文[1]提出了一种球面函数的稀疏解析表示(sparse analytic representation)，其中包括了那些表示成球谐扩展(SH expansion)的函数。有一个事实：每一个个band的SH基函数都可以表示成2l+1个旋转过的 band zonal harmonic(ZH)的“叶”(lobe)的加权和。那么本文利用这个事实来提出一种分解(factorization)方法来剧烈地减少这个数字。我们探讨了一些方法去提高基变换矩阵的稀疏性，并且引入了**lobe sharing**来减少需要用到的unique lobe direction（把这个数字从减到了）。我们的表示方法没有近似误差，对于光照或者传输函数等球面函数都适合。这个不需要离线的计算过程，只需要一个系数的矩阵乘法就能做到ZH和SH的相互映射。本文也提供了SH旋转算法的代码。

**1 Introduction**

球谐（SH）在CG被用在了非常多的地方，例如渲染[Sloan’s PRT in SIG2002]和形状分析[Kazhdan 2007]。很多时候SH是某些函数的理想表示形式，例如参数化的BRDF。用SH表示的BRDF做动态光照是非常快速高效的。

SH一个重要的特性就是在旋转下是闭包(closure)：一个用SH进行扩展的函数可以直接用SH系数进行直接的旋转，而不用显式的重构--->旋转--->重新投影（p.s.这个也是我想到的，如果我看不懂球谐旋转论文后打算实现的搓比fall-back version =.=）。很可惜现有的方法只能在低阶的时候可以逐帧地实时计算，还只支持有限子集的函数。

那么本文的贡献如下：我们提出球面函数可以用另外一种函数基底——rotated zonal harmonic(ZH) lobes。ZH跟SH都在同样的空间下（？，spans the same space as SH），但是ZH可以支持更加高效快速的旋转算法，并且有一种稀疏的线性映射可以在ZH和SH空间中互相映射。我们探讨了如果提高这种映射的稀疏性，及其数学意义(mathematical implication)。基于ZH的旋转算法在CPU、GPU上实现都很快，这个是有评测过的。在section 6里面会提到的**lobe sharing**可以把unique的lobe direction从减少到，而且我们的算法**很容易并行化**。

（然后就是我们算法是真的快，也很适合在GPU上实现，**而且旋转算法就40行左右**！！）

**2 Previous Work**

我们的目标是针对CG应用里的低阶球谐展开推导出一个没有明显视觉误差的SH快速旋转算法。更加高阶的SH展开就难了不少了，这样子要在速度、稳定性、精度上面做出一定的妥协。最近的一个高阶展开算法可以参考[2]

**引用**

[1] Nowrouzezahrai D, Simari P, Fiume E. Sparse zonal harmonic factorization for efficient SH rotation[J]. Acm Transactions on Graphics, 2012, 31(3):1-9.

[2] Lessig C, Witt T D, Fiume E. Efficient and accurate rotation of finite spherical harmonics expansions[J]. Journal of Computational Physics, 2012, 231(2):243-250.