**Sparse Zonal Harmonic Factorization for Efficient SH Rotation**

笔记作者:练孙鸿

**0 Abstract**

本文[1]提出了一种球面函数的稀疏解析表示(sparse analytic representation)，其中包括了那些表示成球谐扩展(SH expansion)的函数。有一个事实：每一个个band的SH基函数都可以表示成2l+1个旋转过的 band zonal harmonic(ZH)的“叶”(lobe)的加权和。那么本文利用这个事实来提出一种分解(factorization)方法来剧烈地减少这个数字。我们探讨了一些方法去提高基变换矩阵的稀疏性，并且引入了**lobe sharing**来减少需要用到的unique lobe direction（把这个数字从减到了）。我们的表示方法没有近似误差，对于光照或者传输函数等球面函数都适合。这个不需要离线的计算过程，只需要一个系数的矩阵乘法就能做到ZH和SH的相互映射。本文也提供了SH旋转算法的代码。

**1 Introduction**

球谐（SH）在CG被用在了非常多的地方，例如渲染[Sloan’s PRT in SIG2002]和形状分析[Kazhdan 2007]。很多时候SH是某些函数的理想表示形式，例如参数化的BRDF。用SH表示的BRDF做动态光照是非常快速高效的。

SH一个重要的特性就是在旋转下是闭包(closure)：一个用SH进行扩展的函数可以直接用SH系数进行直接的旋转，而不用显式的重构--->旋转--->重新投影（p.s.这个也是我想到的，如果我看不懂球谐旋转论文后打算实现的搓比fall-back version =.=）。很可惜现有的方法只能在低阶的时候可以逐帧地实时计算，还只支持有限子集的函数。

那么本文的贡献如下：我们提出球面函数可以用另外一种函数基底——rotated zonal harmonic(ZH) lobes。ZH跟SH都在同样的空间下（？，spans the same space as SH），但是ZH可以支持更加高效快速的旋转算法，并且有一种稀疏的线性映射可以在ZH和SH空间中互相映射。我们探讨了如果提高这种映射的稀疏性，及其数学意义(mathematical implication)。基于ZH的旋转算法在CPU、GPU上实现都很快，这个是有评测过的。在section 6里面会提到的**lobe sharing**可以把unique的lobe direction从减少到，而且我们的算法**很容易并行化**。

（然后就是我们算法是真的快，也很适合在GPU上实现，**而且旋转算法就40行左右**！！）

**2 Previous Work**

我们的目标是针对CG应用里的低阶球谐展开推导出一个没有明显视觉误差的SH快速旋转算法。更加高阶的SH展开就难了不少了，这样子要在速度、数值稳定性、精度上面做出一定的妥协。最近的一个高阶展开算法可以参考[2]。

其实非常多CG领域的信号都很适合在球形定义域里面表示，所以因为SH的解析形式与频域空间的性质，基于SH的扩展还是很受欢迎的。在这里我们只关注SH在PRT（Precomputed Radiance Transfer）里面的应用。

Sloan在2002的PRT里面做了预计算，并把入射光到出射辐射率的线性映射投影到了SH空间。然后在runtime，在世界空间里面做的光照的时候就要用到低阶SH旋转矩阵，这个矩阵就是靠zyz欧拉角顺规的SH旋转迭代计算公式计算出来的[3]，公式还是来自量子力学里面角动量的相关内容。Kautz 把zyz欧拉旋转里面的y-rotation分解成了zxz（笔者注：其实xzx也ok）来做局部空间的着色。但是这个方法不太适合映射到GPU，并且很快成为了SH relighting的瓶颈。而且在local-frame里面做着色就得逐点地做球谐旋转。但是我们的方法就很容易扩展到更多的阶数，而且很容易在GPU上实现，global-frame或者local-frame都可以。

Krivanek[2006]把zyz欧拉旋转里面的y-rotation换成了泰勒展开（Taylor Expansion），可以在低阶的情况下做local-frame的着色，但是在旋转角度大的时候会引入近似误差。但是我们的方法就没有引入近似误差。

提到比较新近的工作，Lessig [2010] 开发出一种类似于Zonal Harmonics的分解方法，用的是Reproducing Kernel Hilbert Space(RKHS)分析，用一种新的采样理论优化了在球面上采样的数值稳定性。这种方法很适合需要较高数值稳定性的高带宽信号。但是我们就对ZH分解的稀疏性做了一定优化，所以在CG领域里面就可以对低带宽信号进行快速的旋转。

基于球面径向基函数（spherical radial-basis functions(SRBFs)）以及Haar小波(Haar Wavelet)的旋转也在PRT这个语境下被探索了一下。Tsai和Shih[4]在2006年的时候用了映射到ZH lobe的SRBF推导出ZH旋转的法则（详见后文）。

(....吹了一下逼)

我们的旋转方法一共有三步（主要都是算术运算）。

**3 Overview and Terminology**

规定一下符号书写的一些规范（算了不如不按他的规范来）。

**引用**

[1] Nowrouzezahrai D, Simari P, Fiume E. Sparse zonal harmonic factorization for efficient SH rotation[J]. Acm Transactions on Graphics, 2012, 31(3):1-9.

[2] Lessig C, Witt T D, Fiume E. Efficient and accurate rotation of finite spherical harmonics expansions[J]. Journal of Computational Physics, 2012, 231(2):243-250.

[3] Kris L. G. Heyde. Angular Momentum in Quantum Mechanics[J]. Physics Today, 1958, 11(4):34-38.

[4] Tsai Y T, Shih Z C. All-frequency precomputed radiance transfer using spherical radial basis functions and clustered tensor approximation[C]// Acm Siggraph. ACM, 2006:967-976.